**Лабораторная работа №3**

**«Построение кода Хэмминга для обнаружения и исправления одиночных ошибок»**

**1 Цель работы** – приобрести умение строить код Хэмминга для обнаружения и исправления одиночных ошибок в кодовых словах.

**2 Основные теоретические сведения**

Систематические коды представляют собой блоковые корректирующие коды, в которых информационные и проверочные символы расположены по строго определенной системе и всегда занимают строго определенные места в кодовых словах. Наиболее известными систематическими кодами, получившими широкое практическое применение, являются коды Хэмминга.

Двоичный код Хэмминга строится следующим образом:

1. Определяется число к проверочных символов из условия:

где – число информационных символов.

1. Выбираются места расположения проверочных символов из условия, чтобы проверочные символы участвовали только в одной операции подсчета четности с целью упрощения процесса кодирования. Такими местами являются символы с номерами, являющиеся целыми степенями числа 2, т. е. 1,2 ,4, 8, 16 и т. д. Символы в кодовых словах Хэмминга нумеруются слева направо.
2. Определяются значения символов слова, называемого синдромом:

из уравнений

то есть складываются по модулю 2 значения тех символов, двоичное представление номеров которых содержат 1 в последнем разряде:

то есть складываются значения тех символов, двоичное представление номеров которых содержат 1 в предпоследнем разряде.

Аналогично получаются выражения для нахождения значений .

Так:

где - значения символов с номерами 1, 2, 3, 4, …

Местоположение ошибки, то есть определение символа с ошибкой осуществляется по значению синдрома. Если синдром состоит из одних нулей, то есть:

то ошибка отсутствует. Если в синдроме есть символы, отличные от 0, то это говорит о наличии ошибки. Например, если , то это означает, что ошибка содержится в восьмом символе, так как .

Другими словами, синдром в коде Хэмминга определяет номер символа с ошибкой. Исправление ошибки осуществляется заменой 0 на 1 либо наоборот 1 на 0.

Для исправления одиночной и обнаружения двойной ошибки, кроме проверок по синдрому, следует проводить еще одну проверку на четность для каждого кодового слова Хэмминга. Чтобы осуществить такую проверку, следует в конце каждого кодового слова добавить проверочный символ таким образом, чтобы сумма единиц в полученном слове всегда была четной. Тогда в случае одной ошибки проверка по синдрому укажет номер ошибочного символа, а проверка на четность укажет наличие ошибки. Если проверка по синдрому укажет на наличие ошибки, а проверка на четность не фиксирует ошибку, то в кодовом слове присутствуют две ошибки.

**3 Порядок выполнения работы**

Данная лабораторная работа предполагает выполнение следующих этапов:

1. Изучить методические указания к лабораторной работе.
2. Пройти собеседование с преподавателем и получить задание для выполнения работы.
3. Для заданных кодовых слов построить кодовые слова Хэмминга.
4. Осуществить проверку работоспособности кода путем изменения значения одного из символов в любом кодовом слове Хэмминга.
5. Оформить и защитить отчет по выполнению лабораторной работы.

**4 Пример выполнения работы**

Пусть требуется получить кодовые слова Хэмминга для двоичных кодовых слов

Рассматриваемые кодовые слова содержат семь информационных символов, то есть . Число проверочных символов определяется из условия . При этом минимальное число проверочных символов , при котором выполняется данное условие, будет , так как

Следовательно, кодовые слова Хэмминга для слов будут содержать 11 символов, то есть . При этом проверочными символами будут 1, 2, 4, 8, а информационными символами соответственно будут 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11.

Пронумеруем и запишем значения информационных символов для кодового слова в соответствии с таблицей 1.

Таблица 1 – Нумерация и запись информационных символов для

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  | 0 |  | 0 | 1 | 0 |  | 1 | 1 | 0 |

Определим значения проверочных символов для . Значение символа определяется из условия:

Отсюда

Значения символа определяется из условия:

Отсюда

Значения символа определяется из условия:

Отсюда

Значения символа определяется из условия:

Отсюда

В итоге кодовое слов Хэмминга для кодового слова будет иметь вид .

Аналогично выполняем данную процедуру для и .

Пронумеруем и запишем значения информационных символов для кодового слова в соответствии с таблицей 2.

Таблица 2 – Нумерация и запись информационных символов для

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  | 0 |  | 1 | 0 | 1 |  | 0 | 0 | 0 |

Определим значения проверочных символов для . Значение символа определяется из условия:

Отсюда

Значения символа определяется из условия:

Отсюда

Значения символа определяется из условия:

Отсюда

Значения символа определяется из условия:

Отсюда

В итоге кодовое слов Хэмминга для кодового слова будет иметь вид .

Пронумеруем и запишем значения информационных символов для кодового слова в соответствии с таблицей 3.

Таблица 3 – Нумерация и запись информационных символов для

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  | 1 |  | 1 | 0 | 0 |  | 0 | 1 | 0 |

Определим значения проверочных символов для . Значение символа определяется из условия:

Отсюда

Значения символа определяется из условия:

Отсюда

Значения символа определяется из условия:

Отсюда

Значения символа определяется из условия:

Отсюда

В итоге кодовое слов Хэмминга для кодового слова будет иметь вид .

Проверим работу кода Хэмминга, заменив в полученных кодовых словах значение одного из символов, то есть введем одиночную ошибку в кодовые слова Хэмминга.

Например, заменим значение пятого символа в слове с 0 на 1, то есть вместо примем .

Определим значения символов синдрома . Для этого пронумеруем символы кодового слова Хэмминга в соответствие с таблицей 4.

Таблица 4 – Пронумерованные символы первого слова

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |

Отсюда значения символов синдрома будут:

Таким образом, синдром имеет следующий вид:

.

Поскольку , то ошибка содержится в пятом символе, что и требовалось проверить.

Теперь заменим значение восьмого символа в слове с 0 на 1, то есть вместо примем .

Определим значения символов синдрома . Для этого пронумеруем символы кодового слова Хэмминга в соответствие с таблицей 5.

Таблица 5 – Пронумерованные символы второго слова

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

Отсюда значения символов синдрома будут:

Таким образом, синдром имеет следующий вид:

.

Поскольку , то ошибка содержится в восьмом символе.

Осталось проверить последнее слово. Заменим в нем значение первого символа в слове с 0 на 1, то есть вместо примем .

Определим значения символов синдрома . Для этого пронумеруем символы кодового слова Хэмминга в соответствие с таблицей 6.

Таблица 6 – Пронумерованные символы третьего слова

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |

Отсюда значения символов синдрома будут:

Таким образом, синдром имеет следующий вид:

.

Поскольку , то ошибка содержится в первом символе.

**5 Варианты заданий**

Пусть требуется получить кодовые векторы Хэмминга для кодовых слов, приведенных в таблице X. Номер варианта определяется как порядковый номер студента в журнале преподавателя.

Таблица X – Варианты заданий для получения кодовых слов Хэмминга

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Вариант | Передаваемые кодовые слова | | |
| 1 | 0111010 | 1101010 | 0101011 |
| 2 | 0001010 | 0001101 | 0010001 |
| 3 | 0010100 | 0011000 | 0011101 |
| 4 | 0011110 | 0110000 | 0100010 |
| 5 | 1100011 | 0001111 | 0011101 |
| 6 | 1001010 | 0011001 | 0100010 |
| 7 | 0001011 | 0000110 | 1010001 |
| 8 | 0010101 | 1000111 | 1111001 |
| 9 | 1011110 | 1011000 | 0100001 |
| 10 | 1000010 | 1001111 | 1011101 |
| 11 | 1000011 | 1100000 | 0011101 |
| 12 | 0011010 | 1101010 | 0101010 |
| 13 | 0000111 | 1000110 | 1001000 |
| 14 | 0001110 | 1001110 | 0010011 |
| 15 | 0011100 | 0011010 | 1011101 |
| 16 | 0010110 | 0101000 | 1100010 |
| 17 | 0001011 | 1101110 | 0001000 |
| 18 | 1011010 | 1011001 | 1100010 |
| 19 | 0001001 | 0000110 | 1110001 |
| 20 | 0010111 | 0100000 | 1101000 |
| 21 | 1010110 | 1010000 | 0110001 |
| 22 | 1000011 | 0100100 | 0001000 |
| 23 | 0000010 | 1100100 | 0111101 |
| 24 | 0000011 | 0100110 | 1010101 |

**6 Контрольные вопросы**

1. Какие коды называют систематическими?
2. Сколько ошибок способен обнаруживать и исправлять код Хэмминга?
3. По какому правилу определяют число проверочных символов в коде Хэмминга?
4. В каких местах располагаются проверочные символы в кодовых словах Хэмминга?
5. По какому правилу строятся уравнения для нахождения проверочных символов в коде Хэмминга?
6. Какую информацию при декодировании кода Хэмминга дает синдром?
7. Каким образом обеспечивается обнаружение двойных ошибок в кодовых словах Хэмминга?